

18.11.

Pro n-ke proměnných

Minimálně: ① Soustava lin. rovnic

Dnes: ② Úloha nalezení rovnice
přímky zadané dvěma body

Jsou dány 2 body $X_1 = [x_1, y_1]$
 $X_2 = [x_2, y_2]$

chceme najít rovnici přímky
 $y = ax + b$, která jimi prochází,
tj. hledáme čísla a, b splňující

$y_1 = ax_1 + b$ } dosadili jsme
 $y_2 = ax_2 + b$ } body X_1, X_2

Najme tedy soustavu lin. rovnic
pro neznámé $a, b \dots$ a vyřešíme.

Př.: Najděte rovnici přímky
procházející body $X_1 = [3, 1], X_2 = [5, 5]$.

Dosadíme do $y = ax + b$:

X_1 : $1 = a \cdot 3 + b$ } odečtena
 X_2 : $5 = a \cdot 5 + b$

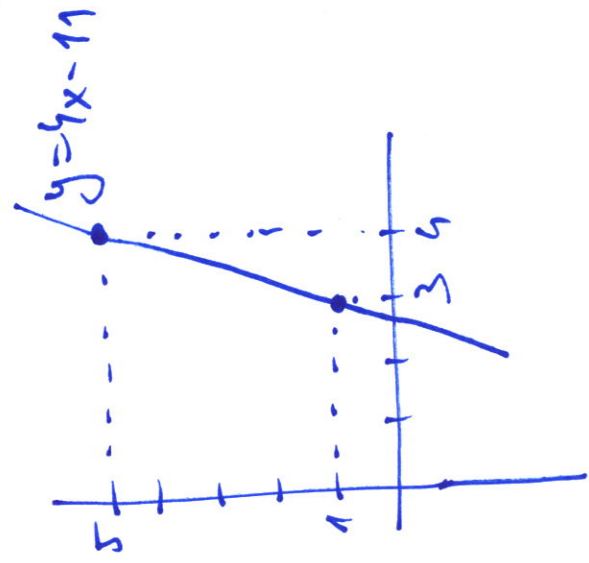
$$\underline{\underline{4 = a}}$$

dosadíme $a = 4$ do 1. rovnice:

$$1 = 4 \cdot 3 + b$$

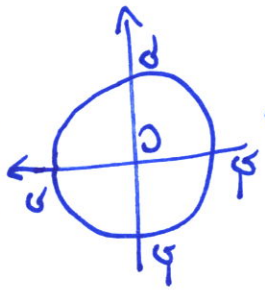
$$\underline{\underline{b = -11}}$$

$\Rightarrow$ přímka je
 $y = 4x - 11$



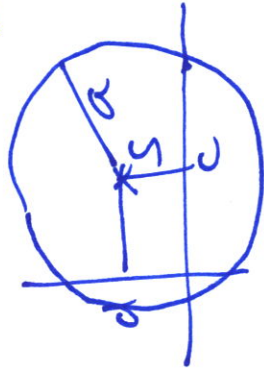
3) Rovnice kružnice

- v základní poloze, tj. střed $S = [0, 0]$; poloměr $a > 0$
 $\Rightarrow$ rovnice $\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$



- v obecné poloze, tj. se středem $S = [c, d]$

$$\Rightarrow \text{rovnice } \boxed{(x-c)^2 + (y-d)^2 = a^2}$$



Průsečík kružnice a přímky:

soustava rovnic
lineární + nelineární

$$\underline{\text{Pr:}} \quad \begin{array}{ll} x^2 + y^2 = 17 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{array}$$

Doplněním: z (2) vyjádříme $y = 5 - x$ a dosadíme do (1):

$$x^2 + (5 - x)^2 = 17$$

$$x^2 + 25 - 10x + x^2 = 17$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

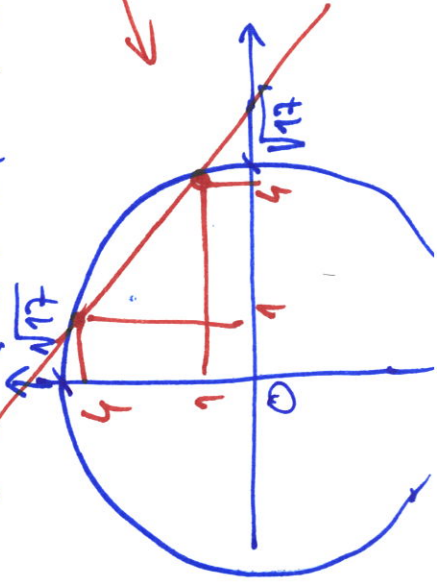
$$x_2 = 4$$

$$y_1 = 4$$

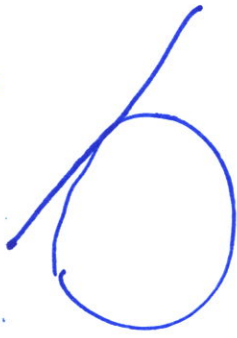
$$y_2 = 1 \quad (\Leftarrow y = 5 - x)$$

$$\Rightarrow K = \{ [1, 4], [4, 1] \}$$

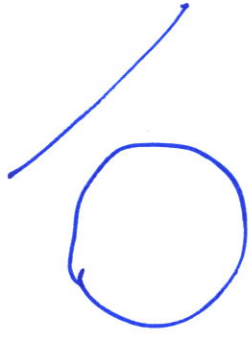
← *sečna*



Možné případy:



tečna
(1 řešení)



sečna
přímka
(žádné řešení)

Žádejte k f více proměnných:

Def: parciální derivace $\equiv$

$\equiv$ derivace fce více proměnných
podle jedné z proměnných

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} \dots \text{parc. derivace fce f podle } x$$

$$\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y} \dots \text{" " podle } y$$

$\partial_x f$: zderivuj fci f podle x,
ostatní proměnné - kraj -
rolí konstant

(podobně pro $\partial_y f$, $\partial_z f$, atd.)

Př: $f(x,y) = 2x^3 + 5x^2y^2$

$$\partial_x f = 6x^2 + 10xy^2$$

$$\partial_y f = 10x^2y$$

Def: Bod $[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ se nazývá
skokovým bodem fce

$f = f(x_1, \dots, x_n)$, pokud Věchný

parc. derivace fce f v tomto
bode jsou nulové. Tj.

$$\left. \begin{array}{l} \partial_{x_1} f = 0 \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f = 0 \end{array} \right\} \text{soustava n rovnic} \\ \text{o n neznámých}$$

Pr: $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + 7$
 stac. body = ?

$$\begin{aligned} \partial_x f &= 2x - 2y - 6 = 0 \\ \partial_y f &= -2x + 4y = 0 \end{aligned} \quad \text{přičtame}$$

$$\begin{aligned} 2y - 6 &= 0 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Dodáme $y = 3$ do 2. rovnice:

$$-2x + 4 \cdot 3 = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

[6,3] stac. bod

Optimalizační úlohy anal.

Hledání extrémů fce

na dané množině

U fce více proměnných je zbytkové dítat "kompletní" příběr fce "jáho n 1 proměnné".
 Zajímají nás jen extrémy funkce fce a dce vědy věcí
 dané množině. To má

ekonomický význam: množina
 odpovídá rozpočtovým (a další)
 omezením, fce = produkci,
 užitková, ...

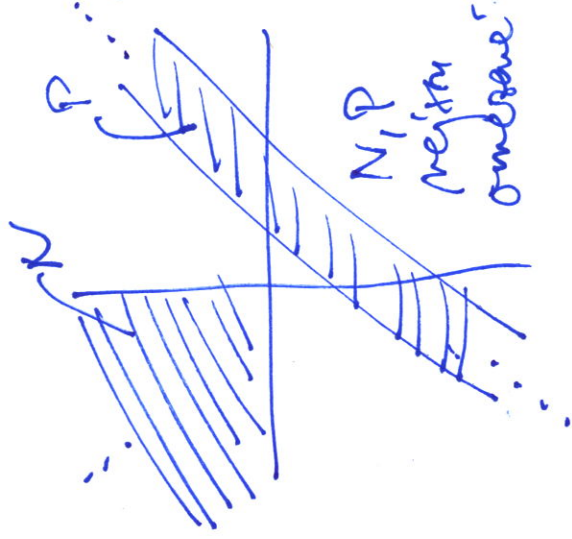
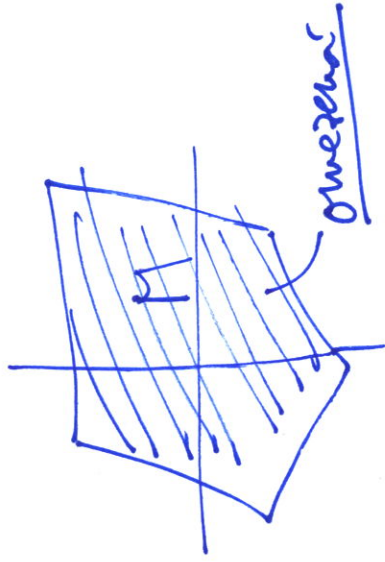
Poradujeme:

1. fce f spojitá (pro velš vědy)

2. množina M kompaktní,

tj. omezená a uzavřená

Výsledek pro $M \subset \mathbb{R}^2$ (tj. pro 2 proměnné)

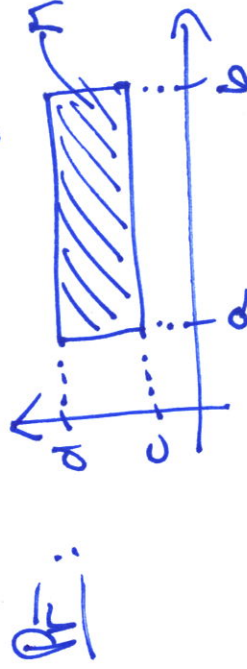


obdelnice $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$
 = kartézský součin intervalů
 = $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle\}$
 kuto obdelnice obsahuje
 svůj obsah (= 4 strany)
 $\Rightarrow$ je uzavřený

Ozn: ∂M = okraj množiny M
 M^o = nitě — u —

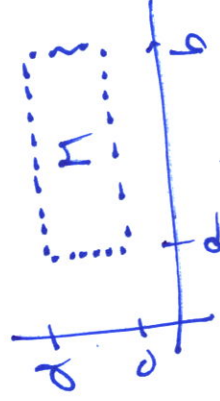
M uzavřená:
 známe pojem uzavřený interval
 = obsahuje své koncové body

Def: $M \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená množina,
 pokud obsahuje svojí okraj



pro uzavřenou M platí: $M = M^o \cup \partial M$

Př: obdelnice $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$
 svůj okraj neobsahuje — je otevřený

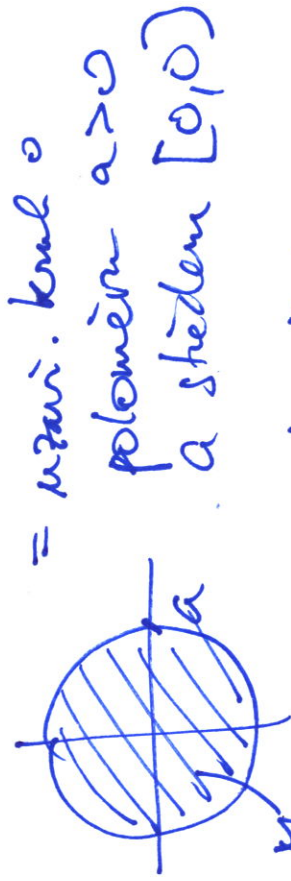


pro otevřenou M
 platí: $M = M^o$

$\mathbb{R}^2$: Ozavřený kruh = kruh

včetně hraniční kružnice

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq a^2\}$$



= uzavřený kruh

poloměrem $a > 0$
a středem $[0, 0]$

jeho okraj = kružnice

$$\partial M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = a^2\}$$

otevřený kruh = vnitřek ok. kruhu

$$M^\circ = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < a^2\}$$

Typicky: uzavřená $\dots \geq, \leq$

otevřená (včetně) $\dots >, <$

okraj $\dots =$

Weierstrassova věta:

spojitá fce na kompaktní množině nabývá svého maxima i minima.

Tudíž každá optimalizační úloha (se spojitou fci f a kompaktní množinou M) má řešení (tj. má max i min).

Růsne též: globální

max/min na množině M :

Bem: toto řešení ~~je~~ nemuzí

být jednoznačné

(společné maxima či minima

můžou nabývat ve více bodech)

Obecné schéma řešení Optimalizační úlohy:

je zadáno f, M , hledáme
glob. extrém f na M .

(A) najdeme kandidáty na
extrém na množině M (M^0),

(B) ————
— na okraji M (∂M),

(C) dosadíme ∇ kandidáty do f ,
porovnáme hodnoty, najdeme
extrém.

(A) Kandidáti v M^0 jsou právě
stacionární body f ce f ležící

v M^0 . Tedy řešíme soustavu
 $\partial_{x_1} f = 0, \dots, \partial_{x_n} f = 0$, a ověříme,
 zda náleží leží v M^0 .

(B) Kandidáty na ∂M hledáme
jako tzv. rovnové extrémy,
rovnba (angl. constraint) je
rovnice zadávající okraj
(nebo jeho část). Dle typu
okraje (rovn) volíme
příslušné metody výpočtu.
→ Příště